数理科学 (19) ヒント・略解

ガンマ関数とベータ関数

定義 $\Gamma(t) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-x} x^{t-1} dx \quad (t > 0)$ をガンマ関数という。

命題. $\Gamma(t)$ の定義の x に関する広義積分は収束する.

証明. $\Gamma(t) = I_1 + I_2$, $I_1 = \displaystyle\int_0^1 e^{-x} x^{t-1} dx$, $I_2 = \displaystyle\int_1^\infty e^{-x} x^{t-1} dx$ と分けて考える。$(0, 1]$ の範囲では $e^{-x} \leq 1$ で, $I_1 < \displaystyle\int_0^1 x^{t-1} dx = \int_0^1 \frac{dx}{x^{1-t}}$ である。最後の積分は $(1-t) < 1$ であるので収束である。故に I_1 は収束である。$[1, \infty)$ の範囲では, $e^{-x} \leq \dfrac{m}{x^{t+1}}$ であるように t に依存した正数 m が選べるので, $I_2 \leq \displaystyle\int_1^\infty \frac{m}{x^2} dx < +\infty$ であるので I_2 も収束である。 $\square$

公式 1 $\Gamma(t) = 2\displaystyle\int_0^\infty y^{2t-1} e^{-y^2} dy$ (定義で $x = y^2$ と置換)

公式 2 $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$, 自然数 n について $\Gamma(n) = (n-1)!$

証明. $\Gamma(t+1) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-x} x^t dx = \big[-e^{-x} x^t\big]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x} t x^{t-1} dx = t\Gamma(t)$

$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x} dx = 1$ より, 自然数 n に対して, $\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1) = (n-1)(n-2)\Gamma(n-2) = \cdots = (n-1)!\Gamma(1) = (n-1)!$ $\square$

注意. 公式 2 を利用すると, $t > 0$ に対する $\Gamma(t)$ の値の計算は, $0 < t \leq 1$ の範囲の $\Gamma(t)$ の値に帰着する。例えば, $\Gamma(3.6) = 2.6 \times 1.6 \times 0.6 \times \Gamma(0.6)$

公式 2 より, ガンマ関数は自然数 n の階乗 $n!$ を, 正の実数にまで拡張したものであると考えられる。以下に Stirling の公式をあげる。特に $t = n$(自然数) の場合, n の階乗 $n!$ の $n \to \infty$ のときの大きさの見積もりが与えられる。なお、Stirling の公式の証明はこのプリントの p.3–4 で与える。

公式 3 Stirling の公式 : $\displaystyle\lim_{t\to\infty} \frac{\Gamma(t+1)}{\sqrt{2\pi} t^{t+0.5} e^{-t}} = 1$

定義 $B(p, q) = \displaystyle\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx \quad (p, q > 0)$ をベータ関数という。

命題. $0 < p < 1$ または $0 < q < 1$ のときは $B(p, q)$ の定義の x に関する積分は広義積分であるが収束である。

証明. $(0, 1/2]$ と $[1/2, 1)$ に積分範囲を分けて, $B(p, q) = J_1 + J_2$ とする:

$$J_1 = \int_0^{1/2} x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx, \quad J_2 = \int_{1/2}^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx$$

$(0,1/2]$ では $(1-x)^{q-1}$ は 1 と $(1/2)^{q-1}$ の間の値なので有界, また $1-p<1$ であるので $\displaystyle\int_0^{1/2} x^{p-1}dx = \int_0^{1/2} \frac{1}{x^{1-p}}dx$ は収束, 故に J_1 は収束である。

$[1/2,1)$ では x^{p-1} は 1 と $(1/2)^{p-1}$ の間の値なので有界, また $1-q<1$ であるので $\displaystyle\int_{1/2}^{1}(1-x)^{q-1}dx$ は収束, 故に J_2 は収束である。 □

命題. $B(p,q)=B(q,p)$

証明. $y=1-x$ と置換すると, $\displaystyle B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$

$$=\int_1^0 (1-y)^{p-1}y^{q-1}\cdot(-dy)=\int_0^1 y^{q-1}(1-y)^{p-1}dy=B(q,p)$$ □

公式 4 $\displaystyle B(p,q)=\int_0^\infty \frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p+q}}dy$ (定義で $x=\frac{y}{1+y}$ と置換)

$$=2\int_0^{\pi/2}\cos^{2p-1}\theta\sin^{2q-1}\theta d\theta$$ (定義で $x=\cos^2\theta$ と置換)

公式 5 $\displaystyle B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$

証明. 公式 1, 累次積分から 2 重積分への変換, および極座標を用いて

$$\Gamma(p)\Gamma(q)=4\int_0^\infty x^{2p-1}e^{-x^2}dx\int_0^\infty y^{2q-1}e^{-y^2}dy$$
$$=4\iint_{\{0<x,\ 0<y\}} x^{2p-1}y^{2q-1}e^{-(x^2+y^2)}dxdy$$
$$=4\iint_{\{0\le\theta\le\pi/2,\quad r>0\}} r^{2(p+q)-1}e^{-r^2}\cos^{2p-1}\theta\sin^{2q-1}\theta drd\theta$$
$$=2\int_0^\infty r^{2(p+q)-1}e^{-r^2}dr\cdot 2\int_0^{\pi/2}\cos^{2p-1}\theta\sin^{2q-1}\theta d\theta$$

公式 1, 4 を用いると, 最後の式は $\Gamma(p+q)B(p,q)$ に等しいことが分かる。 □

注意. $B(p,q)$ の値の計算は, 公式 5 によりガンマ関数の計算に帰着させる。

公式 6 $B(\frac{1}{2},\frac{1}{2})=\pi$

証明. 公式 4 の第 2 式を用いると, $\displaystyle B(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2})=2\int_0^{\pi/2}d\theta=\pi$ □

公式 7 $\displaystyle\Gamma(\tfrac{1}{2})=2\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$

証明. 公式 1 で $t=1/2$ として, $\displaystyle\Gamma(\tfrac{1}{2})=2\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ を得る。また $p=q=\frac{1}{2}$ として公式 4 を適用すると, $B(\frac{1}{2},\frac{1}{2})=\Gamma(\frac{1}{2})^2/\Gamma(1)$ である。$\Gamma(1)=1$ と公式 6 を用いて, $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$ を得る。 □

$\boxed{\text{例題 1}}$ $I = \displaystyle\int_0^\infty x^{\frac{1}{2}} e^{-x^{\frac{1}{3}}} dx$ を求めよ。

解. $y = x^{\frac{1}{3}}$ とおく。 $x = y^3$, $dx = 3y^2 dy$

$I = \displaystyle\int_0^\infty 3y^{\frac{3}{2}} e^{-y} y^2 dy = 3\int_0^\infty y^{\frac{7}{2}} e^{-y} dy$

定義と公式 2, 7 より, $I = 3\Gamma(\frac{9}{2}) = 3\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{315\sqrt{\pi}}{16}$

$\boxed{\text{例題 2}}$ $I = \displaystyle\int_0^1 x^2 \left(\log\frac{1}{x}\right)^3 dx$ を求めよ。

解. $y = \log\frac{1}{x}$ とおく。$x = e^{-y}$, $dx = -e^{-y}dy$, $I = -\displaystyle\int_\infty^0 e^{-2y} y^3 e^{-y} dy$

$3y = z$ とおく。$I = \frac{1}{27\cdot 3}\displaystyle\int_0^\infty z^3 e^{-z} dz$,

定義と公式 2 より, $I = \frac{\Gamma(4)}{81} = \frac{3\cdot2\cdot1}{81} = \frac{2}{27}$

$\boxed{\text{例題 3}}$ $I = \displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(2+x^2)^3}$ を求めよ。

解. $2y = x^2$ とおく。$x = \sqrt{2}y^{\frac{1}{2}}$, $dx = \frac{1}{\sqrt{2}} y^{\frac{-1}{2}} dy$

$I = \displaystyle\int_0^\infty \frac{y^{\frac{-1}{2}} dy}{8\sqrt{2}(1+y)^3}$, 公式 4 より, $I = \frac{1}{8\sqrt{2}} B(\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$

公式 2, 5, 7 より, $I = \frac{1}{8\sqrt{2}} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{5}{2})}{\Gamma(3)} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}{16\sqrt{2}} = \frac{3\pi}{64\sqrt{2}}$

以下では, Stirling の公式 (公式 3) の証明を記す。

$t > 0$, $z > -\sqrt{t}$ で $h(z) = t(-\log(1 + \frac{z}{\sqrt{t}}) + \frac{z}{\sqrt{t}})$ とおく。$h(z)$ は 2 変数 (t, z) の関数であるが, $h(z)$ と書く。$h(z)$ の z-偏微分を $h'(z)$ と書く。

補題 1. $\frac{\Gamma(t+1)}{t^{1/2+t}e^{-t}} = \displaystyle\int_{-\sqrt{t}}^\infty e^{-h(z)} dz$ (右辺の積分を以下で I と表す。)

証明. $\Gamma(t+1) = \displaystyle\int_0^\infty e^{t\log x - x} dx$ において, $x = t + y$ と置換して

$\Gamma(t+1) = \displaystyle\int_{-t}^\infty e^{t\log(t+y)-t-y} dy = \int_{-t}^\infty e^{t\log t - t - t(-\log(1+\frac{y}{t})+\frac{y}{t})} dy = t^t e^{-t} \int_{-t}^\infty e^{-t(-\log(1+\frac{y}{t})+\frac{y}{t})} dy$

更に $y = \sqrt{t}z$ と置換して, $\Gamma(t+1) = t^t e^{-t}\sqrt{t} \displaystyle\int_{-\sqrt{t}}^\infty e^{-t(-\log(1+\frac{z}{\sqrt{t}})+\frac{z}{\sqrt{t}})} dz$ □

補題 2. (i) $h(z) \geq 0$, (ii) $\displaystyle\lim_{t\to\infty} h(z) = \frac{z^2}{2}$

証明. (i) $x > -1$ で $x \geq \log(1+x)$ より直ちに分かる。

(ii) $x = 0$ のまわりで, $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + R_3(x)$, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{R_3(x)}{x^2} = 0$ より,

$h(z) = t\left(-\frac{z}{\sqrt{t}} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{\sqrt{t}}\right)^2 + R_3\left(\frac{z}{\sqrt{t}}\right) + \frac{z}{\sqrt{t}}\right) = \frac{z^2}{2} + \frac{R_3\left(\frac{z}{\sqrt{t}}\right)}{\left(\frac{z}{\sqrt{t}}\right)^2} z^2 \xrightarrow{t\to\infty} \frac{z^2}{2}$ □

以上で, 証明のアイデアは揃っている。公式 7 から分かる $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \sqrt{2\pi}$ と, $\displaystyle\lim_{t\to\infty} h(z) = \frac{z^2}{2}$ (補題 2 の (ii)) とを用いて, 補題 1 の両辺 $\frac{\Gamma(t+1)}{t^{1/2+t}e^{-t}} = \displaystyle\int_{-\sqrt{t}}^\infty e^{-h(z)} dz$ の $t \to \infty$ とすると,

公式 3 を得る: $\lim_{t\to\infty}\frac{\Gamma(t+1)}{t^{1/2+t}e^{-t}}=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\sqrt{2\pi}$

以上で Stirling の公式の証明は終わりであるが, 最後の式の第 1 の「=」の正当性は詳しく説明することが望ましい。以下にそれを述べる。

補題 3. (i) $h'(z)=\frac{\sqrt{t}z}{\sqrt{t}+z}$, (ii) $h''(z)=\frac{t}{(\sqrt{t}+z)^2}>0$

証明. (i) $h'(z)=t\left(-\frac{\frac{1}{\sqrt{t}}}{1+\frac{z}{\sqrt{t}}}+\frac{1}{\sqrt{t}}\right)=\sqrt{t}\left(\frac{\frac{z}{\sqrt{t}}}{1+\frac{z}{\sqrt{t}}}\right)=\frac{\sqrt{t}z}{\sqrt{t}+z}$

(ii) $h''(z)=\frac{\sqrt{t}(\sqrt{t}+z)-\sqrt{t}z}{(\sqrt{t}+z)^2}=\frac{t}{(\sqrt{t}+z)^2}>0$ □

$0<L<\sqrt{t}$ なる $L>0$ に対して, 補題 1 の積分 I を $I_1(L)$, $I_2(L)$, $I_3(L)$ に分ける。

$I_1(L)=\int_{-\sqrt{t}}^{-L}e^{-h(z)}dz,\ \ I_2(L)=\int_{-L}^{L}e^{-h(z)}dz,\ \ I_3(L)=\int_{L}^{\infty}e^{-h(z)}dz$

ここで, $h(z)$ は 2 変数関数 $h(z,t)$ の略記であることに注意して, $I_1(L)$ などは t と L の関数である。また, $\lim_{t\to\infty}I_1(L)$ などは L の関数である。

補題 4. (i) $0\le\lim_{t\to\infty}I_3(L)\le\frac{e^{-L^2/2}}{L}$, (ii) $\lim_{t\to\infty}I_2(L)=\int_{-L}^{L}e^{-\frac{z^2}{2}}dz$,

(iii) $0\le\lim_{t\to\infty}I_1(L)\le\frac{e^{-L^2/2}}{L}$

証明. (i) 補題 3 の (i),(ii) より $z>0$ で $h'(z)>0$ は z について単調増加で,

$\lim_{z\to\infty}h(z)=+\infty$ だから,

$\int_{L}^{\infty}e^{-h(z)}dz\le\frac{1}{h'(L)}\int_{L}^{\infty}h'(z)e^{-h(z)}dz=\frac{1}{h'(L)}\left[-e^{-h(z)}\right]_{L}^{\infty}=\frac{1}{h'(L)}e^{-h(L)}$

$t\to\infty$ として, 補題 2 の (ii), 補題 3 の (i) より, $0\le\lim_{t\to\infty}\int_{L}^{\infty}e^{-h(z)}dz\le\frac{e^{-L^2/2}}{L}$

(ii) 補題 2,(ii) より, $-L\le z\le L$, $t\to\infty$ のとき, $h(z)\to\frac{z^2}{2}$

故に, $\lim_{t\to\infty}I_2(L)=\lim_{t\to\infty}\int_{-L}^{L}e^{-h(z)}dz=\int_{-L}^{L}e^{-\frac{z^2}{2}}dz$

(iii) 補題 3 の (i),(ii) より, $z<0$ では $-h'(z)>0$ は decreasing だから,

$z\le-L$ のとき $-h'(z)\ge-h'(-L)$ で, また $\lim_{z\searrow-\sqrt{t}}-h(z)=-\infty$ だから,

$\int_{-\sqrt{t}}^{-L}e^{-h(z)}dz\le\frac{1}{-h'(-L)}\int_{-\sqrt{t}}^{-L}-h'(z)e^{-h(z)}dz=\frac{1}{-h'(-L)}\left[e^{-h(z)}\right]_{-\sqrt{t}}^{-L}=\frac{e^{-h(-L)}}{-h'(-L)}$

$t\to\infty$ として, 補題 2 の (ii), 補題 3 の (i) より, $0\le\lim_{t\to\infty}\int_{-\sqrt{t}}^{-L}e^{-h(z)}dz\le\frac{e^{-L^2/2}}{L}$ □

$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\sqrt{2\pi}$ だから, 補題 4,(ii) より, $\lim_{t\to\infty}I_2(L)\stackrel{L\to\infty}{\longrightarrow}\sqrt{2\pi}$

また, 補題 4,(i),(iii) より, $\lim_{t\to\infty}I_1(L)\stackrel{L\to\infty}{\longrightarrow}0$, $\lim_{t\to\infty}I_3(L)\stackrel{L\to\infty}{\longrightarrow}0$

故に, $\lim_{t\to\infty}I=\lim_{t\to\infty}(I_1(L)+I_2(L)+I_3(L))\stackrel{L\to\infty}{\longrightarrow}\sqrt{2\pi}$

ところが, $\lim_{t\to\infty}I$ は L に依らないから, $\lim_{t\to\infty}I=\sqrt{2\pi}$, これで Stirling の公式が示された。

参考文献. P. Diaconis, D. Freedman, An Elementary Proof of Stirling's Formula, The American Mathematical Monthly, Vol. 93, No. 2. (1986), pp. 123-125.

問題 19.1. $x > 0$, $n \geqq 0$ は整数とする。$\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^n dt = \frac{n!}{(x+n)(x+n-1)\cdots(x+1)x}$ を示せ。

解. 公式 5 より, $I = \displaystyle\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^n dt = B(x, n+1) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(n+1)}{\Gamma(x+n+1)}$

公式 $\Gamma(n+1) = n!$ と $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ より,

$I = \frac{\Gamma(x)n!}{(x+n)(x+n-1)\cdots(x+1)x\Gamma(x)} = \frac{n!}{(x+n)(x+n-1)\cdots(x+1)x}$

問題 19.2. $a < b$, $p > 0$, $q > 0$ とする。$\displaystyle\int_a^b (s-a)^{p-1}(b-s)^{q-1} ds = (b-a)^{p+q-1}B(p, q)$ を示せ。

解. $t = \frac{s-a}{b-a}$ と置換する。$1 - t = \frac{b-s}{b-a}$

$$\int_a^b (s-a)^{p-1}(s-b)^{q-1} ds$$
$$= \int_0^1 (b-a)^{p-1}t^{p-1}(b-a)^{q-1}(1-t)^{q-1}(b-a)dt = (b-a)^{p+q-1}B(p, q)$$

問題 19.3. 広義積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-\sqrt{x}}} dx$ の値を求めよ。

解. $t = \sqrt{x}$ とおく。$I = 2\displaystyle\int_0^1 (1-t)^{\frac{-1}{2}} tdt = 2B(2, \tfrac{1}{2}) = 2\frac{\Gamma(2)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{5}{2})} = 2\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})} = \frac{8}{3}$

問題 19.4. 積分 $\displaystyle\int_{-1}^3 \sqrt{3-x}(x+1)^3 dx$ の値を求めよ。

解. $t = \frac{x+1}{4}$ とおく。$x = 4t - 1$, $dx = 4dt$, 問題の積分 I は,

$I = \displaystyle\int_0^1 4^3 \cdot 8(1-t)^{\frac{1}{2}} t^3 dt = 512B(4, \tfrac{3}{2}) = 512\frac{\Gamma(4)\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{11}{2})} = 512\frac{6\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}{\frac{9\cdot7\cdot5\cdot3\cdot1}{2^5}\Gamma(\frac{1}{2})} = \frac{16384}{315}$

問題 19.5. ① $I_1 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin x} dx$ をガンマ関数の値を用いて表せ。

ヒント. 公式 4

② $I_2 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}}$ をガンマ関数の値を用いて表せ。

③ $I_1 I_2 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin x} dx \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}} = \pi$ を示せ。

ヒント. 公式 7

解. ① $I_1 = \frac{1}{2}2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2\cdot\frac{1}{2}-1} \sin^{2\cdot\frac{3}{4}-1} dx = \frac{1}{2}B(\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{4}) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{3}{4})}{2\Gamma(\frac{5}{4})}$

② $I_2 = \frac{1}{2}2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2\cdot\frac{1}{2}-1} \sin^{2\cdot\frac{1}{4}-1} dx = \frac{1}{2}B(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{4})}{2\Gamma(\frac{3}{4})}$

③ $I_1 I_2 = \frac{1}{4}\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{3}{4})\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{4})}{\frac{1}{4}\Gamma(\frac{1}{4})\Gamma(\frac{3}{4})} = \Gamma(\tfrac{1}{2})^2 = \pi$

問題 19.6. $p > 0,\ q > 0$, $D = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$ とする。

$\displaystyle\iint_D x^{p-1}y^{q-1} dxdy = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q+1)}$ を示せ。

ヒント. 左辺の 2 重積分を累次積分に直して直接に計算せよ。

解. $I=\int_0^1 dy\int_0^{1-y} x^{p-1}y^{q-1}dx=\int_0^1\left[\frac{1}{p}x^py^{q-1}\right]_0^{1-y}dy$

$=\frac{1}{p}\int_0^1(1-y)^py^{q-1}dy=\frac{1}{p}B(q,p+1)=\frac{\Gamma(q)\Gamma(p+1)}{p\Gamma(p+q+1)}=\frac{\Gamma(q)p\Gamma(p)}{p\Gamma(p+q+1)}=$ 右辺

問題 19.7. 自然数 n に対して, $I=\int_{-1}^1(1-x^2)^ndx=\frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}$ を示せ。

ヒント. 1 次関数で置換して, I をベータ関数に帰着せよ。

解. $2y=x+1$ とおく。$I=\int_0^1\{1-(2y-1)^2\}^n 2dy=2\cdot 4^n\int_0^1 y^n(1-y)^ndy$

$=2^{2n+1}B(n+1,n+1)=2^{2n+1}\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(2n+2)}=\frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}$

問題 19.8. Prove the formula $\Gamma(t)\Gamma(t+\frac{1}{2})=2^{1-2t}\sqrt{\pi}\Gamma(2t)$ for $t>0$.

Note. This is called the Legendre's duplication formula (倍数公式).

ヒント. 公式 4 より, $B(t,t)=2\int_0^{\pi/2}\cos^{2t-1}\theta\sin^{2t-1}\theta d\theta=2{\cdot}2^{1-2t}\int_0^{\pi/2}\sin^{2t-1}2\theta d\theta=2^{1-2t}\int_0^{\pi}\sin^{2t-1}\phi d\phi$

$=2^{1-2t}\cdot 2\int_0^{\pi/2}\sin^{2t-1}\phi d\phi=2^{1-2t}B(t,\frac{1}{2})$

後は公式 5 を用いよ。

解. ヒントより, $B(t,t)=2^{1-2t}B(t,\frac{1}{2})$, $\frac{\Gamma(t)\Gamma(t)}{\Gamma(2t)}=2^{1-2t}\frac{\Gamma(t)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(t+\frac{1}{2})}$, 故に公式を得る。

問題 19.9. $\int_0^\infty\frac{dx}{1+x^3}$ の値を, 必要ならガンマ関数を用いて表せ。

解. $t=x^3$ とおく。

$$\int_0^\infty\frac{dx}{1+x^3}=\int_0^\infty\frac{1}{3}t^{-2/3}\frac{dt}{1+t}=\frac{1}{3}\int_0^\infty\frac{t^{1/3-1}}{1+t^{1/3+2/3}}dt=\frac{1}{3}B(\tfrac{1}{3},\tfrac{2}{3})=\frac{1}{3}\Gamma(\tfrac{1}{3})\Gamma(\tfrac{2}{3})$$

問題 19.10. $0<p<1$ とする。$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan^p xdx$ の値を, ガンマ関数を用いて表せ。

解. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan^p xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^p x\cos^{-p}xdx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2\frac{p+1}{2}-1}x\cos^{2\frac{-p+1}{2}-1}xdx=\frac{1}{2}B(\frac{p+1}{2},\frac{-p+1}{2})=\frac{1}{2}\Gamma(\frac{p+1}{2})\Gamma(\frac{-p+1}{2})$

問題 19.11. ① $\alpha>0,\ \beta>0$ に対して $\int_0^1\frac{x^{\alpha-1}}{\sqrt{1-x^\beta}}dx=\frac{1}{\beta}B(\frac{1}{2},\frac{\alpha}{\beta})$ を示せ。

ヒント. $y=x^\beta$ と置換せよ。

② $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^{1/4}}}=\frac{128}{35}$ を示せ。 ヒント①と公式 2, 5

解. ① $y=x^\beta$, $dy=\beta x^{\beta-1}dx$

$\int_0^1\frac{x^{\alpha-1}}{\sqrt{1-x^\beta}}dx=\frac{1}{\beta}\int_0^1\frac{y^{\frac{\alpha-1}{\beta}}}{\sqrt{1-y}}y^{\frac{1-\beta}{\beta}}dy=\frac{1}{\beta}\int_0^1 y^{\frac{\beta}{\alpha}-1}(1-y)^{\frac{-1}{2}}dy=\frac{1}{\beta}B(\frac{1}{2},\frac{\alpha}{\beta})$

② $\alpha=1,\beta=\frac{1}{4}$ として, $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^{1/4}}}=4B(\frac{1}{2},4)=4\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(4)}{\Gamma(\frac{9}{2})}=\frac{4{\cdot}3{\cdot}2{\cdot}1\Gamma(\frac{1}{2})}{\frac{7}{2}\frac{5}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}=\frac{128}{35}$

問題 19.12. $a,b>0$, $D=\{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1,\ x\ge 0,\ y\ge 0\}$ とする。

$I=\displaystyle\iint_D \sqrt{xy}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)dxdy$ とおく。

① $x=a\sqrt{u(1-v)}$, $y=b\sqrt{uv}$ という置換で, $D-\{(0,0)\}$ は uv 平面の $E=\{0<u\le 1,\ 0\le v\le 1\}$ に1対1に対応することを示せ。

② $J(u,v)=|x_uy_v-x_vy_u|$ について, $J(u,v)=\frac{ab}{4}(1-v)^{-1/2}v^{-1/2}$ を示せ。

③ I の値をガンマ関数を用いて表せ。

解. $x=a\sqrt{u(1-v)}$, $y=b\sqrt{uv}$;　$u=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$, $uv=\frac{y^2}{b^2}$

$J=\frac{a}{2}u^{-1/2}(1-v)^{1/2}\frac{b}{2}u^{1/2}v^{-1/2}+\frac{a}{2}u^{1/2}(1-v)^{-1/2}\frac{b}{2}u^{-1/2}v^{1/2}$

$=\frac{ab}{4}(1-v)^{-1/2}v^{-1/2}\{(1-v)+v\}=\frac{ab}{4}(1-v)^{-1/2}v^{-1/2}$

$I=\displaystyle\iint_E \sqrt{ab}\sqrt{u}(1-v)^{1/4}v^{1/4}u\cdot\frac{ab}{4}(1-v)^{-1/2}v^{-1/2}dudv$

$=\frac{(ab)^{3/2}}{4}\displaystyle\iint_E u^{3/2}(1-v)^{-1/4}v^{-1/4}dudv=\frac{(ab)^{3/2}}{4}\int_0^1 u^{3/2}du\int_0^1(1-v)^{-1/4}v^{-1/4}dv$

$=\frac{2}{5}\frac{(ab)^{3/2}}{4}B(\frac{3}{4},\frac{3}{4})=\frac{(ab)^{3/2}}{10}\frac{(\Gamma(\frac{3}{4}))^2}{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}=\frac{(ab)^{3/2}}{5\sqrt{\pi}}(\Gamma(\frac{3}{4}))^2$

問題 19.13. それぞれの等式を示せ。

① $\alpha>-1$ のとき, $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^\alpha\theta d\theta=\frac{1}{2}B(\frac{\alpha+1}{2},\frac{1}{2})$

② $\alpha=2k$ ($k\ge 0$ は整数) のとき, $\frac{1}{2}B(\frac{\alpha+1}{2},\frac{1}{2})=\frac{\alpha-1}{\alpha}\cdot\frac{\alpha-3}{\alpha-2}\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$

③ $\alpha=2k+1$ ($k\ge 0$ は整数) のとき, $\frac{1}{2}B(\frac{\alpha+1}{2},\frac{1}{2})=\frac{\alpha-1}{\alpha}\cdot\frac{\alpha-3}{\alpha-2}\cdots\frac{2}{3}\cdot 1$

解. ① $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^\alpha\theta d\theta=\frac{1}{2}2\int_0^{\pi/2}\sin^{2\frac{\alpha+1}{2}-1}\theta d\theta=\frac{1}{2}B(\frac{\alpha+1}{2},\frac{1}{2})$

②, ③ $I=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\frac{\alpha-1}{2}\Gamma(\frac{\alpha-1}{2})}{\frac{\alpha}{2}\Gamma(\frac{\alpha}{2})}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\frac{\alpha-1}{2}\frac{\alpha-3}{2}\Gamma(\frac{\alpha-3}{2})}{\frac{\alpha}{2}\frac{\alpha-2}{2}\Gamma(\frac{\alpha-2}{2})}$

$\alpha=2k$ のとき, $I=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\frac{\alpha-1}{2}\frac{\alpha-3}{2}\cdots\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}{\frac{\alpha}{2}\frac{\alpha-2}{2}\cdots\frac{2}{2}\Gamma(1)}=\frac{\pi}{2}\frac{\frac{\alpha-1}{2}\frac{\alpha-3}{2}\cdots\frac{1}{2}}{\frac{\alpha}{2}\frac{\alpha-2}{2}\cdots\frac{2}{2}}=\frac{\pi}{2}\frac{\alpha-1}{\alpha}\frac{\alpha-3}{\alpha-2}\cdots\frac{1}{2}$

$\alpha=2k+1$ のとき, $I=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\frac{\alpha-1}{2}\frac{\alpha-3}{2}\cdots\frac{2}{2}\Gamma(1)}{\frac{\alpha}{2}\frac{\alpha-2}{2}\cdots\frac{3}{2}\Gamma(\frac{3}{2})}=\frac{2}{2}\frac{\frac{\alpha-1}{2}\frac{\alpha-3}{2}\cdots\frac{2}{2}}{\frac{\alpha}{2}\frac{\alpha-2}{2}\cdots\frac{3}{2}}=\frac{\alpha-1}{\alpha}\frac{\alpha-3}{\alpha-2}\cdots\frac{2}{3}$

問題 19.14. ① n を自然数として, $\displaystyle\int_0^\infty\frac{dx}{(1+x^2)^n}=\frac{1}{2}B(\frac{1}{2},n-\frac{1}{2})$ を示せ。

② 数直線 $\mathbb{R}$ で $f(t)=c_n(1+\frac{t^2}{n})^{\frac{-(n+1)}{2}}$ とおく。$\displaystyle\int_{-\infty}^\infty f(t)dt=1$ とするために, 定数 c_n の値は $c_n=(\sqrt{n}B(\frac{1}{2},\frac{n}{2}))^{-1}$ であることを示せ。

ヒント. ① $y=x^2$ と置換して, 公式 4

参考. $f(t)$ を密度関数とする t の分布を自由度 n の t 分布という。

解. $\displaystyle\int_0^\infty\frac{dx}{(1+x^2)^n}=\int_0^\infty\frac{1}{2}y^{-1/2}(1+y)^{-n}dy=\frac{1}{2}\int_0^\infty y^{\frac{1}{2}-1}(1+y)^{-(\frac{1}{2}+\frac{2n-1}{2})}dy$

② $(c_n)^{-1}=\displaystyle\int_{-\infty}^\infty(1+\frac{t^2}{n})^{\frac{-(n+1)}{2}}dt=\int_{-\infty}^\infty(1+x^2)^{\frac{-(n+1)}{2}}\sqrt{n}dx$

$=\sqrt{n}2\displaystyle\int_0^\infty(1+x^2)^{\frac{-(n+1)}{2}}dx=\sqrt{n}B(\frac{1}{2},\frac{n+1}{2}-\frac{1}{2})=\sqrt{n}B(\frac{1}{2},\frac{n}{2})$

問題 19.15. n を自然数とする。曲線 $x^{\frac{1}{n}}+y^{\frac{1}{n}}=1$ が第1象限において両軸と囲む面積は $\frac{n}{2}\frac{(\Gamma(n))^2}{\Gamma(2n)}$ となることを示せ。

解. $A=\int_0^1 dx\int_0^{(1-x^{1/n})^n}dy=\int_0^1(1-x^{1/n})^n dx$, ここで $t=x^{1/n}$ とおいて,

$$A=\int_0^1 nt^{n-1}(1-t)^n dt=nB(n,n+1)=n\tfrac{\Gamma(n)\Gamma(n+1)}{\Gamma(2n+1)}=n\tfrac{\Gamma(n)n\Gamma(n)}{2n\Gamma(2n)}=\tfrac{n}{2}\tfrac{(\Gamma(n))^2}{\Gamma(2n)}$$

問題 19.16. $D=\{x\geq 0,\ y\geq 0, x+y\leq 1\}$, $p>0$, $q>0$, $r>0$ とする。$I=\iint_D x^{p-1}y^{q-1}(1-x-y)^{r-1}dxdy$ の値を, ガンマ関数を用いて表せ。

ヒント. dy, dx の順に累次積分する。y での積分を, $t=\frac{y}{1-x}$ と置換して行え。

解. $I(x)=\int_0^{1-x}y^{q-1}(1-x-y)^{r-1}dy$

$=\int_0^1 t^{q-1}(1-x)^{q-1}(1-x)^{r-1}(1-t)^{r-1}(1-x)dt=(1-x)^{q+r-1}B(q,r)$

故に, $I=B(q,r)\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q+r-1}dx$

$=B(q,r)B(p,q+r)=\frac{\Gamma(q)\Gamma(r)}{\Gamma(q+r)}\frac{\Gamma(p)\Gamma(q+r)}{\Gamma(p+q+r)}=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)\Gamma(r)}{\Gamma(p+q+r)}$

問題 19.17. a, b は実数とする。Stirling の公式を用いて, $\lim_{x\to\infty}\frac{\Gamma(x+a)}{\Gamma(x+b)}x^{b-a}=1$ を示せ。

解. $\frac{\Gamma(x+a)}{\Gamma(x+b)}x^{b-a}$

$=\frac{\Gamma((x+a-1)+1)}{\sqrt{2\pi}(x+a-1)^{0.5+(x+a-1)}e^{-(x+a-1)}}\frac{\sqrt{2\pi}(x+b-1)^{0.5+(x+b-1)}e^{-(x+b-1)}}{\Gamma((x+b-1)+1)}$

$\times\frac{\sqrt{2\pi}(x+a-1)^{0.5+(x+a-1)}e^{-(x+a-1)}}{\sqrt{2\pi}(x+b-1)^{0.5+(x+b-1)}e^{-(x+b-1)}}x^{b-a}$

$=\frac{\Gamma((x+a-1)+1)}{\sqrt{2\pi}(x+a-1)^{0.5+(x+a-1)}e^{-(x+a-1)}}\frac{\sqrt{2\pi}(x+b-1)^{0.5+(x+b-1)}e^{-(x+b-1)}}{\Gamma((x+b-1)+1)}$

$\times(\frac{x+a-1}{x+b-1})^{0.5}(\frac{x+a-1}{x+b-1})^{x+b-1}(x+a-1)^{a-b}e^{b-a}x^{b-a}$

ここで Stirling の公式より, $x\to\infty$ のとき

$\frac{\Gamma((x+a-1)+1)}{\sqrt{2\pi}(x+a-1)^{0.5+(x+a-1)}e^{-(x+a-1)}}\to 1$, $\frac{\sqrt{2\pi}(x+b-1)^{0.5+(x+b-1)}e^{-(x+b-1)}}{\Gamma((x+b-1)+1)}\to 1$,

また, $(\frac{x+a-1}{x+b-1})^{0.5}\to 1$, $(x+a-1)^{a-b}x^{b-a}\to 1$,

$(\frac{x+a-1}{x+b-1})^{x+b-1}e^{b-a}=(1+\frac{a-b}{x+b-1})^{x+b-1}e^{b-a}\to e^{a-b}e^{b-a}=1$,

故に, $\frac{\Gamma(x+a)}{\Gamma(x+b)}x^{b-a}\to 1$

広義積分

問題 19.18. Evaluate the improper double integral $\iint_D\frac{1}{x^3y}dxdy$ as an iterated integral, where $D=\{x\geq 1,\ e^{-x}\leq y\leq 1\}$.

解. $I=\int_1^\infty dx\int_{x^{-1}}^1\frac{1}{x^3y}dy=\int_1^\infty\frac{1}{x^3}\Big[\log y\Big]_{e^{-x}}^1 dx=\int_1^\infty\frac{1}{x^3}xdx=\Big[\frac{-1}{x}\Big]_1^\infty=1$

問題 19.19. $\alpha>0$ とする。$\mathbb{R}^2$ 上の広義 2 重積分 $\iint_{\mathbb{R}^2}\frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^\alpha}$ が収束する α の範囲と, そのときの積分値を求めよ。

解. $A_t=\{(r,\theta)\mid 0\leqq\theta\leqq 2\pi,\ 0\leqq r\leqq t\}$ とする.

求める積分を I とおくと, $I=\lim_{t\to\infty}\iint_{A_t}\frac{1}{(1+r^2)^\alpha}rdrd\theta=\lim_{t\to\infty}\int_0^t\frac{r}{(1+r^2)^\alpha}dr\int_0^{2\pi}d\theta$

$\alpha \neq 1$ のとき,

$$I = 2\pi \lim_{t\to\infty}\left[\frac{-1}{2(\alpha-1)(1+r^2)^{\alpha-1}}\right]_0^t = \begin{cases} \dfrac{\pi}{\alpha-1} & (\alpha>1) \\ \infty & (\alpha<1) \end{cases}$$

$\alpha = 1$ のとき,

$$I = 2\pi \lim_{t\to\infty}\left[\frac{1}{2}\log(1+r^2)\right]_0^t = \infty.$$

答え. $\alpha > 1$ のとき $\frac{\pi}{\alpha-1}$.

問題 19.20. $s > 0$ とする。$D = \{(x,y) \mid 0 < x^2+y^2 \leq 1\}$ 上の広義 2 重積分 $\displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^{s/2}}$ が収束する s の範囲と, そのときの積分値を求めよ。

解. $D_\varepsilon = \{(r,\theta) \mid 0 \leqq \theta \leqq 2\pi,\ \varepsilon \leqq r \leqq 1\}$ とする.

求める積分を I とおくと, $I = \displaystyle\lim_{\varepsilon\to+0}\iint_{D_\varepsilon} r^{-s}\cdot r dr d\theta = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1 r^{-s+1}dr\int_0^{2\pi}d\theta$

$s > 2$ のとき, $I = 2\pi \displaystyle\lim_{\varepsilon\to+0}\left[\frac{1}{-s+2}r^{-s+2}\right]_\varepsilon^1 = \frac{2\pi}{-s+2} - \lim_{\varepsilon\to+0}\frac{2\pi\varepsilon^{-s+2}}{-s+2} = +\infty$

$0 < s < 2$ のとき, $I = 2\pi \displaystyle\lim_{\varepsilon\to+0}\left[\frac{1}{-s+2}r^{-s+2}\right]_\varepsilon^1 = \frac{2\pi}{-s+2} - 0 = \frac{2\pi}{2-s}$

$s = 2$ のとき, $I = 2\pi \displaystyle\lim_{\varepsilon\to+0}\Big[\log r\Big]_\varepsilon^1 = -\lim_{t\to+0}2\pi\log\varepsilon = +\infty$

答え. $0 < s < 2$ のとき, $\frac{2\pi}{2-s}$

問題 19.21. $0 < \alpha < 1$, $D = \{0 \leq x < 1, x < y \leq 1\}$ とする。広義積分 $I = \displaystyle\iint_D \frac{1}{(y-x)^\alpha}dxdy$ の値を求めたい。

① 変換 $u = x$, $v = y - x$ によって D が移る uv 平面の領域 E を求めよ。

② 広義積分 I を E 上の u, v についての広義 2 重積分に変換してから, 積分値を計算せよ。

解. $x = u$, $y = u + v$, $x_u = 1$, $x_v = 0$, $y_u = 1$, $y_v = 1$

$J(u,v) = |x_u y_v - x_v y_u| = 1$, $dxdy = dudv$

① $E = \{0 \leq u < 1, u < u + v \leq 1\} = \{0 \leq u < 1, 0 < v \leq 1 - u\}$

② $I = \displaystyle\iint_E v^{-\alpha}dudv = \int_0^1 du\int_0^{1-u}v^{-\alpha}dv = \int_0^1 \frac{1}{-\alpha+1}(1-u)^{-\alpha+1}du$

$= \left[\frac{-1}{(-\alpha+1)(-\alpha+2)}(1-u)^{-\alpha+2}\right]_0^1 = \frac{1}{(-\alpha+1)(-\alpha+2)}$

問題 19.22. $D = \{0 \leq x \leq 1,\ y^2 < x,\ y \geq 0\}$ として広義積分 $I = \displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{x-y^2}}$ の値を, 次の 2 通りの方法で求めよ。

① 先に y, 次に x の順番の累次積分による方法

② 先に x, 次に y の順番の累次積分による方法

ヒント. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x-y^2}}dy = \sin^{-1}\frac{y}{\sqrt{x}}$, $\displaystyle\int\sqrt{1-y^2}dy = \frac{1}{2}(y\sqrt{1-y^2} + \sin^{-1}y)$

解. ① $I = \displaystyle\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{x}}\frac{1}{\sqrt{x-y^2}}dy = \int_0^1\left[\sin^{-1}\frac{y}{\sqrt{x}}\right]_0^{\sqrt{x}}dx = \int_0^1\frac{\pi}{2}dx\ = \frac{\pi}{2}$

② $I=\int_0^1 dy\int_{y^2}^1 \frac{1}{\sqrt{x-y^2}}dx=\int_0^1\left[2\sqrt{x-y^2}\right]_{y^2}^1 dy=\int_0^1 2\sqrt{1-y^2}dy$

$=\left[y\sqrt{1-y^2}+\sin^{-1}y\right]_0^1=\frac{\pi}{2}$

問題 19.23. $0<\alpha<1$, $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\}$ とする。極座標を用いて, 広義 2 重積分 $I=\iint_D \frac{1}{(1-x^2-y^2)^\alpha}dxdy$ の値を求めよ。

解. $E:0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le r\le 1$

$$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\frac{1}{(1-r^2)^\alpha}rdr=2\pi\left[\tfrac{1}{-2(1-\alpha)}(1-r^2)^{1-\alpha}\right]_0^1=\frac{\pi}{1-\alpha}$$

問題 19.24. $D=\{0<x\le y\le 1\}$ とする。広義 2 重積分 $I=\iint_D\frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ の値を求めよ。

ヒント. 極座標を用いよ。

解. $E:\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{2},\ 0\le r\le\frac{1}{\sin\theta}$

$$I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{1}{\sin\theta}}dr=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}[r]_0^{\frac{1}{\sin\theta}}d\theta$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin\theta}d\theta=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\theta}{1-\cos^2\theta}d\theta$$

$$=\int_{\frac{1}{\sqrt2}}^0\frac{-dt}{(1-t)(1+t)}=\frac12\int_0^{\frac{1}{\sqrt2}}\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)dt$$

$$=\frac12\Big[-\log(1-t)+\log(1+t)\Big]_0^{\frac{1}{\sqrt2}}=\log(\sqrt2+1)$$

問題 19.25. $D=\{(x,y)\mid x\ge 0,\ y\ge 1,\ xy\le 1\}$ とする。広義2重積分 $\iint_D\frac{ydxdy}{(1+xy)^2(1+y^2)}$ の値を求めよ。

解. $\int_1^\infty\frac{ydy}{1+y^2}\int_0^{1/y}\frac{dx}{(1+xy)^2}$

$$=\int_1^\infty\frac{y}{1+y^2}\left[\frac{-1}{y(1+xy)}\right]_0^{1/x}dy=\int_1^\infty\frac{y}{1+y^2}\left(\frac{-1}{2y}+\frac{1}{y}\right)dy$$

$$=\frac12\int_1^\infty\frac{dy}{1+y^2}=\frac12\Big[\tan^{-1}y\Big]_1^\infty=\frac12\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{8}$$

問題 19.26. Evaluate the integral $\iint_{\mathbb{R}^2}\frac{1}{(1+x^2+y^2)^2}dxdy$ over the whole plane $\mathbb{R}^2$.

解. 極座標で, $E=\{0\leqq\theta\leqq 2\pi,\ 0\leqq r\}$ として, 求める積分は,

$$I=\iint_E\frac{1}{(1+r^2)^2}rdrd\theta=2\pi\int_0^\infty\frac{1}{(1+r^2)^2}rdr$$

$$=2\pi\left[\tfrac{-1}{2}(1+r^2)^{-1}\right]_0^\infty=2\pi\left(0-\tfrac{-1}{2}\right)=\pi$$

曲面積

D を xy 平面上の面積確定な有界閉集合とし, $f(x,y)$ を D の上の C^1 級関数とする. このとき $z=f(x,y)$ のグラフは xyz 空間内の曲面となるが, この曲面の面積 A は次の式で表される.

$$A=\iint_D\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,dxdy\qquad(1)$$

以下この式が成り立つ理由を直観的に説明する.

D を小さな長方形に分割し, 面積 A を小さな長方形に対応するグラフ上の小曲面の面積の和と考える. D 内の 4 点 $\mathrm{P}_0(a,b)$, $\mathrm{P}_1(a+h,b)$, $\mathrm{P}_2(a,b+k)$, $\mathrm{P}_3(a+h,b+k)$ を頂点とする微小な長方形 $\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1\mathrm{P}_3\mathrm{P}_2$ を考える. P_i に対応するグラフ上の点を Q_i とすると, 長方形 $\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1\mathrm{P}_3\mathrm{P}_2$ に対応するグラフ上の小曲面は $\overrightarrow{\mathrm{Q}_0\mathrm{Q}_1}$, $\overrightarrow{\mathrm{Q}_0\mathrm{Q}_2}$ で張られる平行四辺形 L で近似できる. Q_0, Q_1, Q_2 の座標がそれぞれ, $\mathrm{Q}_0(a,b,c)$, $\mathrm{Q}_1(a+h,b,c+\delta_1)$, $\mathrm{Q}_2(a,b+k,c+\delta_2)$ と表されるとすると, 平行四辺形 L の面積 ΔS は

$$\Delta S = \sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{Q}_0\mathrm{Q}_1}|^2|\overrightarrow{\mathrm{Q}_0\mathrm{Q}_2}|^2 - \overrightarrow{\mathrm{Q}_0\mathrm{Q}_1}\cdot\overrightarrow{\mathrm{Q}_0\mathrm{Q}_2}} = \sqrt{h^2k^2+h^2\delta_2^2+k^2\delta_1^2}$$

と表される.

さらに

$$\begin{aligned}\delta_1 =& f(a+h,b)-f(a,b) \fallingdotseq f_x(a,b)h\\ \delta_2 =& f(a,b+k)-f(a,b) \fallingdotseq f_y(a,b)k\end{aligned}$$

と近似すると,

$$\Delta S \fallingdotseq \sqrt{1+(f_x(a,b))^2+(f_y(a,b))^2}\ hk$$

求める面積 A は ΔS たちの和であり, したがって上の式の右辺のような量の和で近似される. 実際, $h,k\to 0$ の極限で式 (1) が成り立つことを示すことができる. (厳密な証明は教科書 §7.1, 特に例 7.1.8 参照.)

問題 19.27. 螺線階段面 $z=\tan^{-1}\frac{y}{x}$ の, $x\geq 0$, $y\geq 0$, $0\leq z\leq\frac{\pi}{4}$ であって, かつ円柱 $x^2+y^2=1$ の内部にある部分の曲面積を求めよ。

解. $z=\tan^{-1}\frac{y}{x}$, $z_x=\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\frac{-y}{x^2}$, $z_y=\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\frac{1}{x}$

$1+(z_x)^2+(z_y)^2=1+\frac{x^4}{(x^2+y^2)^2}\frac{y^2}{x^4}+\frac{x^4}{(x^2+y^2)^2}\frac{1}{x^2}=1+\frac{1}{x^2+y^2}$

$D=\{x\geq 0,\ y\geq 0,\ y\leq x,\ x^2+y^2\leq 1\}$, $E=\{r\leq 1, 0\leq\theta\leq\frac{\pi}{4}\}$

$$S=\iint_D\sqrt{1+\frac{1}{x^2+y^2}}dxdy=\iint_E\sqrt{1+\frac{1}{r^2}}rdrd\theta=\frac{\pi}{4}\int_0^1\sqrt{1+r^2}dr$$

$$=\frac{\pi}{4}\left[\frac{r}{2}\sqrt{1+r^2}+\frac{1}{2}\log(r+\sqrt{1+r^2})\right]_0^1=\frac{\pi}{8}(\sqrt{2}+\log(1+\sqrt{2}))$$

問題 19.28. 球面 $x^2+y^2+z^2=1$ の円柱面の内部 $x^2+y^2\leq x$ にある部分の表面積を求めよ。

解. 求める表面積を A とする。

$D=\{x^2+y^2\leq x,\ y\geq 0\}$, D 上で $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$

$f_x=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$, $f_y=\frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$, $\sqrt{1+(f_x)^2+(f_y)^2}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$

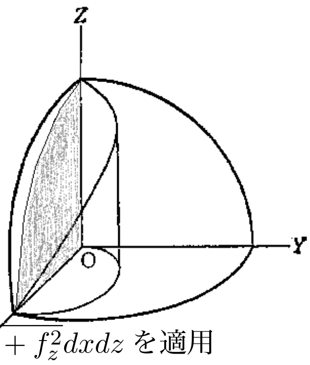
$$\frac{A}{4}=\iint_D\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}dxdy,$$

極座標により, $E=\{r\leq\cos\theta, 0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}\}$ として,

$$A/4=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\cos\theta}\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}dr$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big[-\sqrt{1-r^2}\Big]_0^{\cos\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin\theta)d\theta=\frac{\pi}{2}-1,$$ 答え. $A=2\pi-4$

問題 19.29.



円柱面 $x^2+y^2=x$ の球面 $x^2+y^2+z^2=1$ の内部にある部分 A の表面積 S を求めたい。

A の $y \geq 0$, $z \geq 0$ の部分を B とおく (B の表面積は $\dfrac{S}{4}$)。 また, B の xz 平面への正射影を D とおく。円柱面を D で定義された曲面 $y=f(x,z)=\sqrt{x-x^2}$ のグラフとみなす。

1. xz 平面の領域 D を求めよ。

2. グラフ曲面の表面積の公式 (1) (今は, 変数は x と z) $\displaystyle\iint_D \sqrt{1+f_x^2+f_z^2}dxdz$ を適用して, S を求めよ。

解. 1. B の境界の一部は曲線 $x^2+y^2=x$, $x^2+y^2+z^2=1$

この曲線の xz 平面への正射影は, y を消去して, $x+z^2=1$,

答え. $D=\{(x,z) \mid x \geqq 0,\ z \geqq 0,\ x+z^2 \leqq 1\}$

2. $f(x,z)=\sqrt{x-x^2}$, $f_x=\frac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}}$, $f_z=0$,

$\sqrt{1+f_x^2+f_z^2}=\sqrt{\frac{4x-4x^2+1-4x+4x^2}{4(x-x^2)}}=\frac{1}{\sqrt{4(x-x^2)}}$,

$\frac{S}{4}=\displaystyle\iint_D \frac{1}{\sqrt{4(x-x^2)}}dxdz=\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x}}\frac{1}{\sqrt{4(x-x^2)}}dz$

$=\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{x}}dx\ =\Big[\sqrt{x}\Big]_0^1=1$, 答え. $S=4$

問題 19.30. Find the surface area of the solid of the intersection of the cylinders $x^2+z^2 \leqq 1$ and $y^2+z^2 \leqq 1$.

解. $D=\{0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1,\ y \geqq x\}$ の上のグラフ $z=\sqrt{1-y^2}$ の曲面積 S の 2 倍が, 立体の表面積の第 1 象限にある部分である。空間の 8 個のどの象限にも同じ表面積があるから, 求める面積 A は $A=16S$ である。

$\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\sqrt{1+\left(\frac{-y}{\sqrt{1-y^2}}\right)^2}=\sqrt{\frac{(1-y^2)+y^2}{1-y^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$

$A=16\displaystyle\iint_D \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}dxdy$

$=16\displaystyle\int_0^1 dy\int_0^y \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}dx=16\int_0^1 \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}dy\ =16\left[-(1-y^2)^{\frac{1}{2}}\right]_0^1=16$

問題 19.31. Find the area of the cap cut from the sphere $x^2+y^2+z^2=2$ by the cone $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

解. $x^2+y^2+z^2=2$ と $z=x^2+y^2$ の交線は, $x^2+y^2=1$, $z=1$ で, その xy 平面への正射影は $x^2+y^2=1$。

xy 平面上の領域 $D=\{x^2+y^2 \leqq 1\}$ の上にある曲面 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ の曲面積が求める面積 A である。

$z_x=\frac{-x}{\sqrt{2-x^2-y^2}}$, $z_y=\frac{-y}{\sqrt{2-x^2-y^2}}$,

$\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\sqrt{\frac{2-x^2-y^2+x^2+y^2}{2-x^2-y^2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2-x^2-y^2}}$

$A=\displaystyle\iint_D \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2-x^2-y^2}}dxdy$, $E=\{0 \leqq \theta \leqq 2\pi, 0 \leqq r \leqq 1\}$ として,

$$A = \iint_E \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2-r^2}} r dr d\theta = 2\pi \int_0^1 \frac{\sqrt{2}r}{\sqrt{2-r^2}} dr$$
$$= 2\sqrt{2}\pi \left[-(2-r^2)^{\frac{1}{2}} \right]_0^1 = 2\sqrt{2}\pi(\sqrt{2}-1)$$

問題 19.32. $a > 0$ とする. 次を示せ:

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\, dx = \arcsin \frac{x}{a}$$

解. $\dfrac{x}{a} = \sin y$ を x で微分すると $\dfrac{1}{a} = \cos y \cdot y'$. したがって

$$y' = \frac{1}{a\cos y} = \frac{1}{a\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

問題 19.33. xy 平面上の C^1 級曲線 $y = f(x)$ $(a \le x \le b)$ を x 軸の周りに 1 回転してできる曲面の面積 A は次の式で与えられることを示せ:

$$A = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1+(f'(x))^2}\, dx$$

Hint: 公式 (1) と問題 19.32

解. 問題の曲面の $z \ge 0$ の部分は, 次の関数のグラフとして表される:

$$z = g(x, y) = \sqrt{(f(x))^2 - y^2}$$

すると

$$\sqrt{1+g_x^2+g_y^2} = \frac{|f(x)|\sqrt{1+(f'(x))^2}}{(f(x))^2-y^2}$$

となり

$$\begin{aligned}
\frac{A}{2} &= \int_a^b \left(\int_{-|f(x)|}^{|f(x)|} \sqrt{1+g_x^2+g_y^2}\ dy \right) dx \\
&= \int_a^b |f(x)| \sqrt{1+(f'(x))^2} \left(\int_{-|f(x)|}^{|f(x)|} \frac{dy}{(f(x))^2-y^2} \right) dx \\
&= \int_a^b |f(x)| \sqrt{1+(f'(x))^2} \left(\left[\arcsin \frac{y}{|f(x)|} \right]_{-|f(x)|}^{|f(x)|} \right) dx \\
&= \pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1+(f'(x))^2}\, dx
\end{aligned}$$

問題 19.34. Cycloid $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$ $(0 \le t \le 2\pi)$ の x 軸の周りの回転面の表面積 A を求めよ。

ヒント. 問題 19.33 より, $A = 2\pi \displaystyle\int_0^{2\pi} y \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = 2\pi \int_0^{2\pi} y(t) \sqrt{\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy(t)}{dt}\right)^2} dt$

解. $A = 2\pi\int_0^{2\pi}(1-\cos t)\sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t}dt$
$= 2\pi\sqrt{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^{3/2}dt$
$= 2\pi\sqrt{2}(\sqrt{2})^3\int_0^{2\pi}\sin^3\frac{t}{2}dt = 16\pi\int_0^{\pi}\sin^3 sds$
$= 32\pi\int_0^{\pi/2}\sin^3 sds = 32\pi\frac{2}{3} = \frac{64\pi}{3}$

問題 19.35. Asteroid $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$ の x 軸の周りの回転体の表面積を求めよ。

解. $y=(1-x^{2/3})^{3/2}$,
$y' = \frac{3}{2}(1-x^{2/3})^{1/2}\frac{-2}{3}x^{-1/3} = -(1-x^{2/3})^{1/2}x^{-1/3}$
$S = 4\pi\int_0^1(1-x^{2/3})^{3/2}\sqrt{1+(1-x^{2/3})x^{-2/3}}dx = 4\pi\int_0^1(1-x^{2/3})^{3/2}x^{-1/3}dx$
$x^{2/3}=t$, $\frac{2}{3}x^{-1/3}dx = dt$, $dx = \frac{3}{2}t^{1/2}dt$
$S = 4\pi\int_0^1(1-t)^{3/2}t^{-1/2}\frac{3}{2}t^{1/2}dt$
$= 6\pi\int_0^1(1-t)^{3/2}dt = 6\pi\left[\frac{-2}{5}(1-t)^{5/2}\right]_0^1 = \frac{12\pi}{5}$

問題 19.36. $0<c<a$ とする。円 $x^2+(y+c)^2=a^2$ の $y\geq 0$ の部分を x 軸の周りに回転した曲面の面積を求めよ。

解. $y=-c+\sqrt{a^2-x^2}$, $y'=-x(a^2-x^2)^{-1/2}$,
$\sqrt{1+y'^2} = \sqrt{1+x^2(a^2-x^2)^{-1}} = \sqrt{\frac{a^2}{a^2-x^2}}$
$\frac{S}{2} = \int_0^{\sqrt{a^2-c^2}}2\pi a(\sqrt{a^2-x^2}-c)(a^2-x^2)^{-1/2}dx$
$= 2\pi a\int_0^{\sqrt{a^2-c^2}}(1-\frac{c}{\sqrt{a^2-x^2}})dx$
$= 2\pi a\left[(x-c\sin^{-1}\frac{x}{a})\right]_0^{\sqrt{a^2-c^2}} = 2\pi a\sqrt{a^2-c^2}-2\pi ac\sin^{-1}\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{a}$