数理科学 (21) ヒント・略解

※問題 21.10 に訂正があります.

- $X, Y\colon \Omega \to \mathbb{R}$ を 2 つの確率変数とする. $(X,Y)\colon \Omega \to \mathbb{R}^2$ を, $\omega \in \Omega$ に $\mathbb{R}^2$ の元 (ベクトル) $(X(\omega), Y(\omega))$ を対応させる写像とするとき, (X,Y) を**確率ベクトル random vector** という.[1]

- 確率ベクトル (X,Y) に対し, $\mathbb{R}^2$ 上の確率測度 $P^{(X,Y)}$ を次のように定義する: $\mathbb{R}^2$ の事象 $A \subset \mathbb{R}^2$ に対し,
$$P^{(X,Y)}(A) := P(\{\omega \in \Omega \,|\, (X(\omega), Y(\omega)) \in A\}) = P((X,Y) \in A)$$
$P^{(X,Y)}$ を X, Y の**同時確率分布 joint probability distribution** という.

- 確率変数 X と Y が独立であるとは, I, $J \subset \mathbb{R}$ を任意の区間とするとき, 次が成り立つことである:
$$P^{(X,Y)}(I \times J) = P((X,Y) \in I \times J) = P(X \in I)P(Y \in J) = P^X(I)P^Y(J)$$

- X, Y ともに離散的確率変数のとき, (X,Y) を離散的確率ベクトルという. X, Y のとる値の集合をそれぞれ $\{x_1, x_2, \ldots\}$, $\{y_1, y_2, \ldots\}$ とすると, (X,Y) の**同時確率質量関数 joint probability mass function** $p(x,y)$ は次のように定義される:
$$p(x,y) = \begin{cases} P((X,Y) = (x_i, y_j)) & (x,y) = (x_i, y_j) \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$
混乱のおそれがなければ簡単に $p_{ij} = p(x_i, y_j)$ とおく.

- X, Y の確率質量関数を $p^X(x)$, $p^Y(y)$ とすると, X, Y が独立であるための必要十分条件は
$$p(x,y) = p^X(x)p^Y(y)$$

- 同時確率質量関数 $p(x,y)$ から, X, Y それぞれの確率質量関数 $p^X(x)$, $p^Y(y)$ が次のように得られる:
$$\begin{aligned} p^X(x_i) &= P(X = x_i) = \sum_{j=1}^{\infty} P((X,Y) = (x_i, y_j)) = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} \\ p^Y(y_j) &= P(Y = y_j) = \sum_{i=1}^{\infty} P((X,Y) = (x_i, y_j)) = \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij} \end{aligned}$$
(X,Y) から得られる X, Y の確率分布のことを**周辺確率分布 marginal probability distribution** という. また, 次の記号もよく使われる:
$$p_{i\bullet} = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}, \qquad p_{\bullet j} = \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij}$$

[1] 一般に n 個の確率変数 $X_1, \ldots, X_n\colon \Omega \to \mathbb{R}$ に対し, n 次元確率ベクトル $(X_1, \ldots, X_n)$ が定義される. この後に出てくる諸々の事項も n 次元に容易に拡張される.

この記号を用いると, X と Y が独立である必要十分条件は, 任意の i, j に対し次が成り立つことである: $p_{ij} = p_{i\bullet}p_{\bullet j}$.

- X, Y がともに連続的確率変数のとき, $\mathbb{R}^2$ の任意の事象 [2] $D \subset \mathbb{R}^2$ に対し, 次を満たす関数 $h(x,y)$ が存在するとき (X,Y) を連続的確率ベクトルと呼ぶ:

$$P^{(X,Y)}(D) = P((X,Y) \in D) = P(\{\omega \in \Omega \,|\, (X(\omega), Y(\omega)) \in D\}) = \iint_D h(x,y)dxdy$$

関数 $h(x,y)$ を**同時確率密度関数 joint probability function** と呼ぶ. また

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x,y)dy, \qquad g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x,y)dx$$

をそれぞれ X, Y の**周辺確率密度関数 marginal probability density function** という. これらはそれぞれ X と Y の確率密度関数である.

- X, Y 連続的のときの独立性の条件は

$$h(x,y) = f(x)g(y)$$

- X, Y が連続的で独立のとき, $Z = X + Y$ の確率密度関数 $k(z)$ は次で与えられる:

$$k(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(z-x)dx \tag{1}$$

- X を離散的確率変数とする. X のとる値の集合を $\{x_1, x_2, \ldots\}$ とし, 確率質量関数を $p(x)$ とする. $p_i = p(x_i)$ と置く. $g(x)$ を x の連続関数とするとき, 確率変数 $g(X)$ の期待値は次で定義される:

$$E[g(X)] = \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i)p_i$$

特に X の期待値 $E(X)$ と分散 $V(X)$ は

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i, \qquad V(X) = E[(X - E(X))^2] = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - E(X))^2 p_i$$

- X を連続的確率変数とし, その確率密度関数を $f(x,y)$ とする. $g(x)$ を x の連続関数とするとき, 確率変数 $g(X)$ の期待値は次で定義される:

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx$$

特に X の期待値 $E(X)$ と分散 $V(X)$ は

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx, \quad V(X) = E[(X - E(X))^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 f(x)dx \tag{2}$$

[2] 正確には D は可測集合と呼ばれるものに限定される. D は面積確定な集合ぐらいに思っておいて良い.

- (X,Y) を離散的確率ベクトルとする．p_{ij} を上で定義した通りとする．$g(x,y)$ を x, y の連続関数とするとき, 確率変数 $g(X,Y)$ の期待値は次で定義される:
$$E[g(X,Y)] = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} g(x_i, y_j)p_{ij}$$
- (X,Y) を連続的確率ベクトルとし, 同時確率密度関数を $h(x,y)$ とする．$g(x,y)$ を x, y の連続関数とするとき, 確率変数 $g(X,Y)$ の期待値は次で定義される:
$$E[g(X,Y)] = \iint_{\mathbb{R}^2} g(x,y)h(x,y)dxdy \tag{3}$$
- 確率変数 X の期待値 $E(X)$, 分散 $V(X)$ がそれぞれ μ, σ^2 であるとき, 確率変数 $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ を X の標準化という．$E(Z)=0$, $V(Z)=1$ となる．

問題 21.1. Suppose the random variable x has a uniform distribution $U(0,1)$.
① Compute the mean μ and the variance σ^2 of x.
Hint. $\mu = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$ and $\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - \mu^2$
② Let z be the standardized random variable of x. Write the density function $g(z)$ of z in the form $g(z) = \begin{cases} \square & (\square \leqq z \leqq \square) \\ \square & (z < \square \text{ or } z > \square). \end{cases}$

解. ① $\mu = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_0^1 xdx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$
$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - \mu^2 = \int_0^1 x^2dx - \frac{1}{4} = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$
② $z = \frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2\sqrt{3}}} = 2\sqrt{3}x - \sqrt{3}$, 答え．$g(z) = \frac{1}{2\sqrt{3}} f\left(\frac{z+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\right) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{3}} & (-\sqrt{3} \leqq z \leqq \sqrt{3}) \\ 0 & (z < -\sqrt{3} \text{ or } z > \sqrt{3}). \end{cases}$

問題 21.2. 硬貨を二回投げる試行を考える．X を, 一回目と二回目の出た面が異なるとき 10, そうでないとき 0 である確率変数とし, Y を一回目と二回目が両方表のとき 20, それ以外のとき 0 である確率変数とする．

(1) 期待値 $E(X)$, $E(Y)$, 分散 $V(X)$, $V(Y)$ を計算せよ．

(2) 確率ベクトル (X,Y) の分布の同時確率質量関数 $p(x,y)$ を求め, グラフを描け．

(3) X, Y は独立かどうか答えよ．共分散 $Cov(X,Y)$ を計算せよ．

(4) 確率ベクトル (X,Y) の同時確率質量関数 $p(x,y)$ から期待値 $E(X+Y)$, 分散 $V(X+Y)$ を計算せよ．また以下の関係式が成り立つことを確かめよ．
$$E(X+Y) = E(X) + E(Y), \qquad V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2Cov(X,Y)$$

解. (1) $E(X) = 0 \times \frac{1}{2} + 10 \times \frac{1}{2} = 5$, $E(X^2) = 0 \times \frac{1}{2} + 10^2 \times \frac{1}{2} = 50$,
$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = 25$.

$E(Y) = 0 \times \frac{3}{4} + 20 \times \frac{1}{4} = 5$, $E(Y^2) = 0 \times \frac{3}{4} + 20^2 \times \frac{1}{4} = 100$.
$V(Y) = E(Y^2) - \{E(Y)\}^2 = 75$

(2) (グラフは略.)

$$p(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & (x,y) = (0,0) \\ \dfrac{1}{4} & (x,y) = (10,0) \text{ or } (10,20) \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

(3) $E(XY) = 0 \times 0 \times \frac{1}{2} + 10 \times 0 \times \frac{1}{4} + 0 \times 20 \times 0 + 10 \times 20 \times \frac{1}{4} = 50$. $Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 25$. $Cov(X,Y) \neq 0$ なので X, Y は独立でない.

(4) $E(X+Y) = (0+0) \times 12 + (10+0) \times \frac{1}{4} + (0+20) \times 0 + (10+20) \times \frac{1}{4} = 10$.
一方 $E(X) + E(Y) = 5 + 5 = 10$.
$E[(X+Y)^2] = 10^2 \times 14 + (10+20)^2 \times \frac{1}{4} = 250$.
$V(X+Y) = E[(X+Y)^2] - \{E(X+Y)\}^2 = 150$.
一方 $V(X) + V(Y) + 2Cov(X,Y) = 25 + 75 + 2 \times 25 = 150$.

問題 21.3. 確率変数 X, Y はともに一個のサイコロ投げの分布に従い,[3] 独立とする.

(1) 確率ベクトル (X,Y) の分布の同時確率質量関数 $p(x,y)$ を求め, グラフを描け.

(2) 確率変数 $Z = X + Y$ の分布の確率質量関数 $q(z)$ を求め, そのグラフを描け. また, 期待値 $E(Z)$, 分散 $V(Z)$ を計算せよ.

解. (1) (グラフは略.)

$$p(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{36} & (x,y) = (i,j), \quad i,j = 1,2,3,4,5,6 \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

(2) $q(z)$ は z が $2 \leq z \leq 12$ なる整数のとき下の表の値. それ以外のとき値は 0.

z	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$q(z)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

$E(z) = \frac{1}{36}(2 + 6 + 12 + 20 + 30 + 42 + 40 + 36 + 30 + 22 + 12) = \frac{252}{36} = 7$
$V(z) = \frac{1}{36}(4 + 18 + 48 + 100 + 180 + 294 + 320 + 324 + 300 + 242 + 144) - 49$
$\quad = \frac{1974}{36} = \frac{329-294}{6} = \frac{35}{6}$

問題 21.4. 確率変数 X, Y はともに一様分布 $U(0,1)$ に従い, 独立とする.

(1) 確率ベクトル (X,Y) の分布の同時確率密度関数 $h(x,y)$ を求め, グラフを描け. 期待値 $E(X+Y)$, 分散 $V(X+Y)$ を計算せよ. 但し, $E(X+Y)$, $V(X+Y)$ は上の式 (3) を用いて計算せよ.

[3] 数理科学 (20) のプリント参照.

(2) 確率変数 $Z = X + Y$ の分布の確率密度関数 $g(z)$ を計算し, $g(z)$ のグラフを描け. 期待値 $E(Z)$, 分散 $V(Z)$ を計算せよ. 但し, $E(Z)$, $V(Z)$ は上の式 (2) を用いて計算せよ. ヒント. 一様分布 $U(0,1)$ の密度関数を $f(x)$ とすると, $f(x)$ は $0 < x < 1$ で 1 で, 他の x に対しては 0 なので, 上の式 (1) より, $g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)f(z-x)dx = \int_0^1 f(z-x)dx$

解. (1) 一様分布 $U(0,1)$ の確率密度関数を $f(x)$ とすると, $0 < x < 1$ で $f(x) = 1$, その他の x について $f(x) = 0$ である. X, Y は独立なので

$$h(x,y) = f(x)f(y) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

(グラフは略.)

$$E(X+Y) = \iint_{\mathbb{R}^2} (x+y)h(x,y)dxdy = \int_0^1 \int_0^1 (x+y)dxdy = 1$$

$$V(X+Y) = \iint_{\mathbb{R}^2} \{(x+y) - E(X+Y)\}^2 h(x,y)dxdy = \int_0^1 \int_0^1 (x+y-1)^2 dxdy = \frac{1}{6}$$

(2) $z < 0$ のとき,

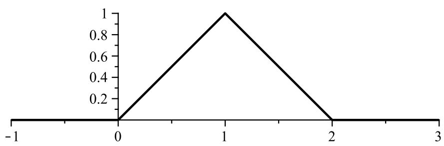
$g(z) = \int_0^1 f(z-x)dx = \int_0^1 0dx = 0$

$0 \leqq z \leqq 1$ のとき,

$g(z) = \int_0^1 f(z-x)dx$

$= \int_0^z f(z-x)dx + \int_z^1 f(z-x)dx$

$= \int_0^z 1dx + \int_z^1 0dx = [x]_0^z = z$



$1 \leqq z \leqq 2$ のとき,

$g(z) = \int_0^1 f(z-x)dx = \int_0^{z-1} f(z-x)dx + \int_{z-1}^1 f(z-x)dx = \int_0^{z-1} 0dx + \int_{z-1}^1 1dx$

$= [x]_{z-1}^1 = 2 - z$

$2 < z$ のとき, $g(z) = \int_0^1 f(z-x)dx = \int_0^1 0dx = 0$

したがって

$$g(z) = \begin{cases} z & 0 \leq z \leq 1 \\ 2-z & 1 \leq z \leq 2 \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

$$E(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} zg(z)dz = \int_0^1 z^2dz + \int_1^2 z(2-z)dz = 1$$

$$V(Z) = E(Z^2) - \{E(Z)\}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} z^2 g(z)dz - 1 = \int_0^1 z^3dz + \int_1^2 z^2(2-z)dz - 1 = \frac{1}{6}$$

注. 問題 21.3 の $q(z)$ のグラフを描けば, 問題 21.4 の $g(z)$ と類似のグラフになることに注目せよ。

問題 21.5. 確率変数 x の確率密度関数が $f(x)=\begin{cases} e^{-x} & (0 \leqq x) \\ 0 & (x<0) \end{cases}$ で与えられているとする. 同様に確率変数 y の確率密度関数は $f(y)$ で, x と y は独立とする. 和 $z=x+y$ の確率密度関数 $g(z)$ を求めよ.

解. $g(z)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)f(z-x)dx=\int_{0}^{\infty} e^{-x}f(z-x)dx$

$z<0$ のとき, $0 \leqq x$ にたいして $f(z-x)=0$ なので, $g(z)=0$

$z \geqq 0$ とする。$0 \leqq x \leqq z$ のときは $f(z-x)=e^{-z+x}$,

$x>z$ のときは, $f(z-x)=0$ なので, $g(z)=\displaystyle\int_0^z e^{-x}e^{-z+x}dx=\int_0^z e^{-z}dx=ze^{-z}$

答え. $g(z)=\begin{cases} ze^{-z} & (0 \leqq z) \\ 0 & (z<0) \end{cases}$

問題 21.6. $0<a<1$, $0<b<1$ を定数とする。2 次元離散確率変数 (x,y) を確率質量関数 $p(x,y)=\begin{cases} a^x b^y & (x,\ y \text{ が自然数のとき}) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$ で定める。

① 確率分布であるための, a, b のみたす条件を求めよ。

② x, y の独立性を調べよ。

解. ① $P(x=i)=\frac{a^i b}{1-b}$, $\sum(x,y)p(x,y)=\frac{ab}{(1-a)(1-b)}$, $\frac{ab}{(1-a)(1-b)}=1$ より $a+b+1=0$

② $P(x=i)\cdot P(y=j)=\frac{a^i b}{1-b}\frac{ab^j}{1-a}=a^ib^j=P(x=i,y=j)$ より, 独立

問題 21.7. 確率ベクトル (X,Y) の同時密度関数 $f(x,y)$ が

$$f(x,y)=\begin{cases} 8xy & 0<x<1, \quad 0<y<x \text{ のとき} \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

で与えられているとする.

(1) $P(X<0.5, Y<0.5)$, $P(X<0.5)$, $P(Y<0.5)$ を計算せよ.

(2) X と Y は独立かどうか答えよ.

解. (1)

$$P(X<0.5,Y<0.5)=P(X<0.5)=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^x 8xydy\right)dx=\frac{1}{16}$$
$$P(Y<0.5)=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^x 8xydy\right)dx+\int_{\frac{1}{2}}^1\left(\int_0^{\frac{1}{2}} 8xydy\right)dx=\frac{7}{16}$$

(2) $P(X<0.5,Y<0.5)\neq P(X<0.5)P(Y<0.5)$ なので X, Y は独立でない.

問題 21.8. 確率変数 X, Y は同じ累積分布関数 $F(t)$ を持つとする. すなわち $P(X\leq t)=P(Y\leq t)=F(t)$. また X,Y は独立とする.

(1) $P(X\leq t, Y\leq t)$ を $F(t)$ で表わせ.

(2) 確率変数 $Z = \max\{X, Y\}$ の累積分布関数 $G(z)$ を求めよ.

解. (1) X,Y は独立なので, $P(X \le t, Y \le t) = P(X \le t)P(Y \le t) = F(t)F(t) = \{F(t)\}^2$. (2) $G(z) = P(Z \le z) = P(\max\{X, Y\} \le z) = P(X \le z, Y \le z) = \{F(z)\}^2$.

問題 21.9. X と Y は独立でないが, X^2 と Y^2 が独立であるような2つの確率変数の例を挙げよ.

解. 例えば, 確率ベクトル (X, Y) の同時確率密度関数 $f(x, y)$ が次で与えられるもの.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & \{0 < x < 1 \text{ かつ } 0 < y < 1\} \text{ または } \{-1 < x < 0 \text{ かつ } -1 < y < 0\} \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

このとき $P(X \le 0, Y \le 0) = P(X \le 0) = P(Y \le 0) = \frac{1}{2}$ であり, $P(X \le 0, Y \le 0) \neq P(X \le 0)P(Y \le 0)$ なので X, Y は独立でない.

また, 確率ベクトル $(U, V) = (X^2, Y^2)$ の同時確率密度関数 $g(x, y)$ は次で与えられる.

$$g(u,v) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{v}} & 0 < u < 1 \text{ かつ } 0 < v < 1 \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

すると $g(u, v)$ は u の関数と v の関数の積に表すことができるので U, V は独立である.

$g(u, v)$ は重積分の変数変換公式から導くことができる. $u = x^2$, $v = y^2$ のとき

$$\det\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2y \end{pmatrix} = 4xy$$

なので $dudv = 4xydxdy$ である. 逆に解いて $dxdy = \dfrac{dudv}{4\sqrt{uv}}$ なので

$$\iint f(x,y)dxdy = \iint f(\sqrt{u}, \sqrt{v})\frac{dudv}{4\sqrt{uv}}$$

さらに $a, b, c, d > 0$, $a \le b$, $c \le d$ とすると

$$\begin{aligned} &\int_a^b \int_c^d g(u,v)dudv = P(a \le U \le b,\, c \le V \le d) = P(a \le X^2 \le b,\, c \le Y^2 \le d) \\ &= P(\{\sqrt{a} \le X \le \sqrt{b}, \sqrt{c} \le Y \le \sqrt{d}\} \cup \{-\sqrt{b} \le X \le -\sqrt{a}, -\sqrt{d} \le Y \le -\sqrt{c}\}) \\ &= P(\sqrt{a} \le X \le \sqrt{b}, \sqrt{c} \le Y \le \sqrt{d}) + P(-\sqrt{b} \le X \le -\sqrt{a}, -\sqrt{d} \le Y \le -\sqrt{c}) \\ &= \int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} \int_{\sqrt{c}}^{\sqrt{d}} f(x,y)dxdy + \int_{-\sqrt{b}}^{-\sqrt{a}} \int_{-\sqrt{d}}^{-\sqrt{c}} f(x,y)dxdy \\ &= 2\int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} \int_{\sqrt{c}}^{\sqrt{d}} f(x,y)dxdy = 2\int_a^b \int_c^d f(\sqrt{u}, \sqrt{v})\frac{dudv}{4\sqrt{uv}} \end{aligned}$$

これより $u, v > 0$ のとき

$$g(u,v) = 2f(\sqrt{u}, \sqrt{v})\frac{1}{4\sqrt{uv}} = \frac{f(\sqrt{u}, \sqrt{v})}{2\sqrt{uv}}$$

がわかる．また $a,b<0$ または $c,d<0$ のとき

$$\int_a^b\int_c^d g(u,v)dudv = P(a\le U\le b,\ c\le V\le d) = P(a\le X^2\le b,\ c\le Y^2\le d)=0$$

なので, $u<0$ または $v<0$ のとき $g(u,v)=0$ である．

問題 21.10. X を離散的または連続的な確率変数とする．$h(x)$ を $\mathbb{R}$ 全体の上で定義された C^1 級関数で, 全ての実数 x に対し $h'(x)>0$ を仮定する．確率変数 $\cancel{Y=g(X)}$ $Y=h(X)$ に対し, $E(Y)=E(h(X))$ を示せ．説明： X が連続的なとき, X, Y の確率密度関数をそれぞれ $f(x)$, $g(y)$ とするとき, 示すべきことは

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{\infty} yg(y)dy = E(h(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)f(x)dx$$

略解. X が連続的なときのみ示す．まず, X, Y の確率密度関数をそれぞれ $f(x)$, $g(y)$ とするとき $f(x)=g(h(x))h'(x)$ という関係式が成り立つことを示す．h が単調増加であることに注意する．任意の $a\le b$ に対し, 途中 $y=h(x)$ という置換をして,

$$\int_a^b f(x)dx = P(a\le X\le b) = P(h(a)\le Y\le h(b)) = \int_{h(a)}^{h(b)} g(y)dy = \int_a^b g(h(x))h'(x)dx$$

これより関係式が得られる．このとき

$$E(Y)=\int yg(y)dy = \int h(x)g(h(x))h'(x)dx = \int h(x)f(x)dx = E(h(X))$$

問題 21.11. 10 分間隔で発車する電車に, 始発と終発の間の任意の時刻に乗りに行く人の待ち時間を x 分とする。x の密度関数 $f(x)$ と平均値 $E(x)$ とを求めよ。

解. $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{10} & 0<x<10\\ 0 & \text{その他}\end{cases}$, $\quad E(x)=\displaystyle\int_0^{10}\frac{x}{10}dx=\frac{100}{20}=5$

問題 21.12. Suppose that the density function for the length x of a telephone call is $f(x)=\begin{cases} xe^{-x} & (x\geqq 0)\\ 0 & (x<0).\end{cases}$ The cost y of a call of length x is $y=\begin{cases} 2 & (0<x\leqq 3)\\ 2+6(x-3) & (x>3).\end{cases}$
Find the mean cost of a call.

解. $E(y)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} yf(x)dx$

$=\displaystyle\int_0^3 2xe^{-x}dx+\int_3^{\infty}(2+6(x-3))xe^{-x}dx$

ここで, $\displaystyle\int xe^{-x}dx=-xe^{-x}-e^{-x}$, $\displaystyle\int x^2e^{-x}dx=-x^2e^{-x}-2xe^{-x}-2e^{-x}$ より,

$E(y)=-2[xe^{-x}+e^{-x}]_0^3+16[xe^{-x}+e^{-x}]_3^{\infty}\ -6[x^2e^{-x}+2xe^{-x}+2e^{-x}]_3^{\infty}$

$=-2(3e^{-3}+e^{-3}-1)-16(3e^{-3}+e^{-3})+6(9e^{-3}+6e^{-3}+2e^{-3})$

$=2+30e^{-3}$